小课题研究：培养学生创新能力的有效途径

——以圆锥曲线光学性质的证明为例

昆山经济技术开发区高级中学　杜志国

一、问题的提出

《中学数学》2014 年 8 月上高中版，刊登了一篇题为《基于一道高考试题的数理探究其推广》的文章，对于圆锥曲线的光学性质做出论证和推广。但文中对于光学性质的几何证明却存在错误，其内容摘录如下：

结论 2：椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$P$ 为 C 上除长轴端点外的任意一点，$\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 与过 P 点的椭圆的切线 l 垂直。

证明：如图 1，作 F_2 关于直线 l 的对称点 F'_2，连接 PF'_2、$F_1F'_2$，假设 $F_1F'_2$ 与椭圆交于 P'，则 $|P'F_2|=|P'F'_2|$，$|PF_2|=|PF'_2|$。由椭圆的定义不难得到：$|PF_1|+|PF_2|=|PF_1|+|PF'_2|=2a$。同理，$|P'F_1|=|P'F'_2|$

$=|F_1F'_2|=2a$，故 $|PF_1|+|PF'_2|=|F_1F'_2|$，所以，P'、P 两点重合，F_1、P、F'_2 三点共线，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$（如图 2）。由 PM 为 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线，得 $\angle 4=\angle 5$，则 $\angle 3+\angle 4=\angle 5+\angle 2=90^\circ$，故 $PM\perp l$。

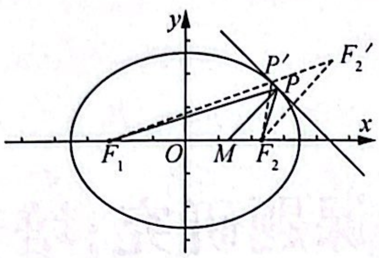

图 1

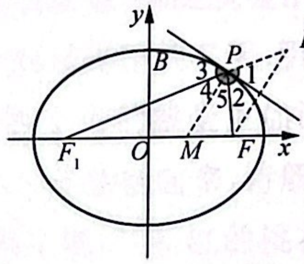

图 2

笔者决定利用这一教育契机和同学们一起进行圆锥曲线光学性质证明的小课题研究。于是，和同学们一起阅读了本文，然后提出问题：

[老师] 谁能发现证明中存在的问题？

学生的情绪一下被调动起来，他们再一次认真的阅读、积极思考，每个人都想成为第一个发现者！果然，有一名同学，发现了问题的所在：

[学生 1] 我认为证明中的问题是 $|P'F_2|=|P'F'_2|$ 不成立！

[老师] 能说一下原因吗？

[学生 1] 由于 F'_2 是点 F 关于直线 l 的对称点，故切线 l 是线段 $F_2F'_2$ 的垂直平分线，若 $|P'F_2|=|P'F'_2|$，则 P' 必在 l 上，而上述证明过程中"假设 $F_1F'_2$ 与椭圆交于 P'，"显然，P' 在椭圆上，若认可 $|P'F_2|=|P'F'_2|$ 成立，则等于认可 P' 既在椭圆上又在切线 l 上，就等于认同 P' 就是切点 P！后面再去证明两点重合就没有意义了。

[老师] 你的分析非常好！证明过程中，默认了两点重合又来证明重合，无疑在逻辑上出现了错误！

[老师] 文中对于双曲线性质的推导也出现了同样的错误。但是，老师认为这种几何证明的思路还是很有价值的。那么，我们不妨就以"椭圆的光学性质的证明"为题进行一个小课题研究。希望你们能改正文章里的证明方法的错误，同时，也可以创造出更多新的证明方法。

所谓"小课题研究"是指学生在老师的指导下，根据各自的兴趣、爱好和

条件，自主地从学习生活和社会生活中选择和确定不同的研究课题，在开放情境中，自己确定研究方法，自主地开展研究，通过多种渠道主动收集、分析、处理信息，并加以综合应用，解决实际问题的一种新颖的活动。在新课程改革这一大背景下，开展小课题研究活动具有很大的现实意义。小课题研究把学生活动从课堂延伸到了家庭，从学校扩展到了社会，是提升学生学习兴趣、培养学生创新能力的绝佳途径。

二、研究成果

过了一周的时间，在老师的点拨下，经过课题小组成员的共同努力，同学们的成果终于面世了！于是，笔者和他们共同举行了一场结题报告会。

[老师] 关于椭圆的光学性质证明，大家得到了什么样的研究成果？

[学生 1] 首先，我们对圆锥曲线的光学性质由来进行研究，经过搜集和整理资料，我们对于圆锥曲线有了更加的深刻认识，我代表课题组汇报一下：。

历史上第一个考查圆锥曲线的是梅纳库莫斯(公元前 375 年—325 年)；大约 100 年后，阿波罗尼奥斯在《圆锥曲线论》中提出的圆锥曲线的光学性质："从椭圆一个焦点发出的光，经过椭圆反射后，反射光线都汇聚到椭圆的另一个焦点上"；"从双曲线一个焦点发出的光，经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线都汇聚到椭圆的另一个焦点上"；"从抛物线的焦点发出的光，经过抛物线反射后，反射光线都平行于抛物线的轴"。而圆锥曲线真正从后台走上前台，从学术的象牙塔中进入现实生活的世界里，应归功于德国天文学家开普勒，开普勒在长期的天文观察及对记录的数据分析中，发现了著名的"开普勒三定律"，其中第一条是："行星在包含太阳的平面内运动，划出以太阳为焦点的椭圆"。

阿波罗尼奥斯对于圆锥曲线的光学性质通过严谨公理化体系，运用演绎推理构造四点共圆的方式进行证明，其证法堪称经典。但证明过程中所运用的一些辅助定理(或结论)，对于我们没有系统学习过《圆锥曲线论》的高中生是难以理解的！

[学生 2] 我来汇报一下圆锥曲线的光学性质在生活中的广泛应用。椭圆的光线特性，常被用来设计一些照明设备或聚热装置。双曲线的光学性质同样也有聚焦性质，但它是反向虚聚焦，即置于双曲线一个焦点处的射线源，被双曲线反射后，其反射线的反向延长线，必定经过另一个焦点双曲线，这种反向虚聚焦性质就应用在天文望远镜的设计等方面。抛物线的聚焦特性，是聚能装置或定向发射装置的最佳选择。例如探照灯、汽车大灯等反射镜面的纵剖线是抛物线，把光源置于它的焦点处，经镜面反射后能成为平行光束，照射距离更远。

[学生 3] 我来汇报一下利用几何方法证明的过程：结合光学性质，我们把问题等价转化为：法线是入射光线和反射光线的角平分线(椭圆和抛物线)或者是外角平分线(双曲线)，简而言之，即证明：角平分线与切线或切线的法线重合。

(一) 利用几何方法证明

[学生 3] 根据《基于一道高考试题的数理探究其推广》一文的论述，问题的核心就是论证 P' 与 P 是同一点，于是，我们猜想：如果 P' 与 P 是同一点，那么它们必然具有同样的性质！再结合椭圆、切线和两个焦点等元素的图像特征，我们发现切点 P 是切线 l 上到两个焦点距离之和最小的点！而 P' 点如果也具有这个性质，问题就可以解决了！于是，首先论证了以下的两个结论，并作为几何证法的辅助定理。

【辅助定理 1】 直线 l 的同一侧有两点 A、B，A_1 是点 A 关于直线 l 的对称点，直线 A_1B 交直线 l 于点 P，则 P 是直线 l 上到距 A、B 离之和最小的点。

证明：如图 3，在直线 l 任取一点 P_1，连接 P_1A、P_1B、P_1A_1，则易得：$PA+PB=PA_1+PB=A_1B$，$P_1A+P_1B=P_1A_1+P_1B\geqslant A_1B$，故当且仅当 P_1 与 P 重合时取得"＝"号，辅助定理 1 得证。

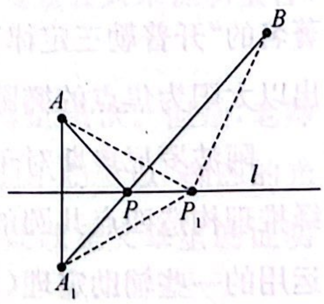

图 3

【辅助定理 2】 椭圆外的点到椭圆两焦点的距离之和大于椭圆的长轴长。

证明：如图4，设 P_1 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外一点，连接 P_1F_1 交椭圆于 P，连接 P_1F_2，则 $|P_1F_1|+|P_1F_2|=|P_1P|+|PF_1|+|P_1F_2|>|PF_1|+|PF_2|=2a$

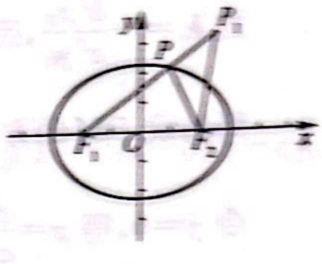

图4

下面进行证明：

【证明1】 如图1，作 F_2 关于直线 l 的对称点 F'_2 连接 F'_2F_1 交椭圆于 P'，根据【辅助定理1】可知，P' 是直线 l 上到 F_1 与 F_2 距离之和最小的唯一点，而根据【辅助定理2】可知，P 是直线 l 上到 F_1 与 F_2 距离之和最小的唯一点，故 P' 与 P 是同一点。

此时，如图5，则 $\angle APF_1=\angle BPF_2=\angle BPF'_2$，由 PM 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线，得 $\angle MPF_1=\angle MPF_2$，则易知 $\angle APF_1+\angle MPF_1=90°$，故 $PM\perp l$。

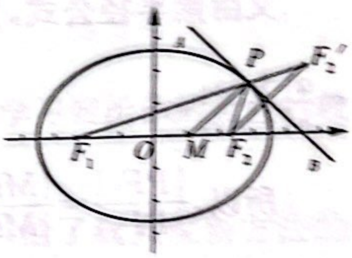

图5

［老师］很好！同学们发现的两个辅助定理都是很常见的，但是把它们组合在一起就发生了奇妙的“化学变化”。其实，这种解决问题的方法就是我们学习新知识的“基本套路”。运用类比、联想、特殊化、一般化等方法不断的寻求新旧知识的联系点，从而找到解题的思路，这种利用知识解决问题的能力其实就是一种创新能力！

（二）利用三角形内角平分线性质定理证明

［学生4］我们将命题等价转化为证明过点 P 的法线 PM 为 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线即可，根据角平分线性质定理，只需在 $\triangle PF_1F_2$ 中证明：$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|MF_1|}{|MF_2|}$。

【证明2】 设 $P(x_0,y_0)$ 为 C 上除长轴端点外的任意一点，过点 P 作 $PM\perp l$ 交 F_1F_2 于 M。

由替代法则可知，过点 P 的切线方程 l 为：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1(a>b>0)$，

故 $k_l=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$,因为 $PM\perp l$,所以 $k_{PM}=\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}$。

则法线 PM 的方程为:$y-y_0=\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$。

令 $y=0$,得 $x=\dfrac{c^2}{a^2}x_0(c^2=a^2-b^2)$,故 $M\left(\dfrac{c^2}{a^2}x_0,0\right)$,

所以,$|MF_1|=\dfrac{c^2}{a^2}x_0+c$,$|MF_2|=c-\dfrac{c^2}{a^2}x_0$,$\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}=\dfrac{\dfrac{c^2}{a^2}x_0+c}{\dfrac{c^2}{a^2}x_0-c}$

$=\dfrac{a^2+cx_0}{a^2-cx_0}$,

又由焦半径公式,$|PF_1|=ex_0+a$,$|PF_2|=ex_0-a$,$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\dfrac{ex_0+a}{ex_0-a}$

$=\dfrac{a^2+cx_0}{a^2-cx_0}$,

所以,$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}$,由角平分线性质定理可得,法线 PM 为$\angle F_1PF_2$的角平分线,命题得证。

[老师] 利用三角形的内角平分线性质定理把证明转化为计算边长比值,再利用解析几何的计算功能实现证明,体现了几何代数的和谐统一!不过,老师建议证明中切线方程、焦半径公式的由来要说清楚。

(三) 利用点到直线的距离公式证明

[学生 5] 老师,我来说一下做完证明 2 之后,我发现的方法:利用角平分线上的点到角的两边距离相等,只需利用点到直线的距离求出 M 到 PF_1 和 PF_2 的距离相等即可。

【证明 3】 由证法 2,可得 $M\left(\dfrac{c^2}{a^2}x_0,0\right)$,

直线 PF_1 的方程为:$y-y_0=\dfrac{y_0}{x_0+c}(x-x_0)$,

即:$y_0x-(x_0+c)y+cy_0=0$,

设点 M 到 PF_1 距离为:$d_1=\dfrac{\left|\dfrac{c^2}{a^2}x_0y_0+cy_0\right|}{\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}}=\dfrac{|y_0|\left|\dfrac{c^2}{a^2}x_0+c\right|}{\sqrt{(y_0-0)^2+[x_0-(-c)]^2}}$

$=\frac{|y_0||MF_1|}{|PF_1|}$,

直线 PF_2 的方程为：$y-y_0=\frac{y_0}{x_0-c}(x-x_0)$，即：$y_0x-(x_0-c)y-cy_0=0$，

设点 M 到 PF_2 距离为 $d_2=\frac{\left|\frac{c^2}{a^2}x_0y_0-cy_0\right|}{\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}}=\frac{|y_0|\left|\frac{c^2}{a^2}x_0-c\right|}{\sqrt{(y_0-0)^2+[x_0-c]^2}}$

$=\frac{|y_0||MF_2|}{|PF_2|}$,

故只要证明$\frac{|MF_1|}{|PF_1|}=\frac{|MF_2|}{|PF_2|}$，由证法 2 可知此式显然成立，

故：$d_1=d_2$，命题得证。

[老师] 非常好！我想你一定也可以体会到团队学习带给你的意外的收获了吧？

[学生 5] 是的，大家在一起相互讨论、彼此启发，给了我发现新方法的灵感！

（四）利用到角公式证明

[学生 6] 老师，通过课题研究，我学习了一个新知识：到角公式，得到了一个新证法，即：证明过点 P 的法线 PM 为$\angle F_1PF_2$ 的角平分线，可转化为直线 PF_1 到直线 PM 的角等于直线 PM 到直线 PF_2 的角，证明如下：

【证明 4】 设 $P(x_0,y_0)$为 C 上除长轴端点外的任意一点，过点 P 作 $PM\perp l$ 交 F_1F_2 于 M，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)(c^2=a^2-b^2)$。

由证明 2 知，$k_{PM}=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$，$k_{PF_1}=\frac{y_0}{x_0+c}$，$k_{PF_2}=\frac{y_0}{x_0-c}$，

直线 PF_1 到直线 PM 的角为$\angle F_1PM$，由到角公式可得

$$\tan\angle F_1PM=\frac{k_{PM}-k_{PF_1}}{1+k_{PM}\cdot k_{PF_1}}=\frac{\frac{a^2y_0}{b^2x_0}-\frac{y_0}{x_0+c}}{1+\frac{a^2y_0}{b^2x_0}\cdot\frac{y_0}{x_0+c}}=\frac{a^2y_0x_0+a^2y_0c-b^2x_0y_0}{b^2x_0^2+b^2x_0c+a^2y_0^2}$$

$$=\frac{c^2y_0x_0+a^2y_0c}{b^2x_0c+a^2b^2}=\frac{y_0c}{b^2},$$

$$\tan\angle MPF_2=\frac{k_{PF_2}-k_{PM}}{1+k_{PM}\cdot k_{PF_2}}=\frac{\dfrac{y_0}{x_0-c}-\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}}{1+\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-c}}=\frac{-a^2y_0x_0+a^2y_0c+b^2x_0y_0}{b^2x_0^2-b^2x_0c+a^2y_0^2}$$

$$=\frac{-c^2y_0x_0+a^2y_0c}{-b^2x_0c+a^2b^2}=\frac{y_0c}{b^2},$$

所以，$\tan\angle F_1PM=\tan\angle MPF_2$，即：$\angle F_1PM=\angle MPF_2$，命题得证。

[老师] 很好的方法！到角公式已经离开了我们的教材，你能够利用自主学习的新知识来解决新的问题，是值得大家学习的！同学们，现在的知识更新的速度很快，仅仅依靠学校学习的知识是很难适应未来社会的需求的，这就要求我们终身学习，成为一名学习型人才。因此，自主学习能力将会决定我们未来的发展，希望大家注重在这方面培养自己！

(五) 运用向量夹角公式证明

[学生 7] 对于$\angle F_1PM=\angle MPF_2$ 的证明，我想到向量的夹角公式这一工具，只需证明$\overrightarrow{F_1P}$、$\overrightarrow{F_2P}$与法向量的成角相等即可，于是有证明 5。

【证明 5】 设 $P(x_0,y_0)$为 C 上除长轴端点外的任意一点，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则$\overrightarrow{F_1P}=(x_0+c,y_0)$，$\overrightarrow{F_2P}=(x_0-c,y_0)$，由焦半径公式$|\overrightarrow{F_1P}|=a+ex_0$，$|\overrightarrow{F_2P}|=a-ex_0$。过 $P(x_0,y_0)$的切线为：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，即 $b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$，

故取切线的法向量 $\boldsymbol{m}=(b^2x_0,a^2y_0)$。

则 $$\cos\langle\overrightarrow{F_1P},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\overrightarrow{F_1P}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{F_1P}||\boldsymbol{m}|}=\frac{b^2x_0^2+b^2cx_0+a^2y_0^2}{(a+ex_0)\sqrt{b^4x_0^2+a^4y_0^2}}$$

$$=\frac{a^2b^2+b^2cx_0}{(a+ex_0)\sqrt{b^4x_0^2-a^2b^2x_0^2+a^2b^2x_0^2+a^4y_0^2}}$$

$$=\frac{ab^2(a+ex_0)}{(a+ex_0)\sqrt{b^2x_0^2(b^2-a^2)+a^2(b^2x_0^2+a^2y_0^2)}}$$

$$=\frac{ab^2}{\sqrt{-c^2b^2x_0^2+a^4b^2}}=\frac{ab}{(a^2-cx)(a^2+cx)}$$

$$=\frac{b}{\sqrt{(a-ex)(a+ex)}}。$$

$$\cos\langle \overrightarrow{F_2P}, \boldsymbol{m}\rangle = \frac{\overrightarrow{F_2P}\cdot \boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{F_2P}||\boldsymbol{m}|} = \frac{b^2x_0^2 - b^2cx_0 + a^2y_0^2}{(a-ex_0)\sqrt{b^4x_0^2+a^4y_0^2}}$$

$$= \frac{a^2b^2 - b^2cx_0}{(a-ex_0)\sqrt{b^4x_0^2 - a^2b^2x_0^2 + a^2b_2x_0^2 + a^4y_0^2}}$$

$$= \frac{ab^2(a-ex_0)}{(a-ex_0)\sqrt{b^2x_0^2(b^2-a^2)+a^2(b^2x_0^2+a^2y_0^2)}}$$

$$= \frac{ab^2}{\sqrt{-c^2b^2x_0^2+a^4b^2}} = \frac{ab}{(a^2-cx)(a^2+cx)}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{(a-ex)(a+ex)}}。$$

故 $\cos\langle \overrightarrow{F_1P}, \boldsymbol{m}\rangle = \cos\langle \overrightarrow{F_2P}, \boldsymbol{m}\rangle$，易得法线 PM 平分 $\angle F_1PF_2$。

[老师] 非常好！大家的各种证明方法，也让老师受益匪浅，很高兴小课题研究带给大家的不仅仅是知识的收获，更为重要的是学习方式的转变和能力的提升！同时，更难能可贵的看到了你们思维的创新！

小课题研究不必有严格的步骤，只要有问题意识，发现问题，然后读书寻找解决问题的方法，验证方法有效性，它不必有立项，不需要进行中期检查，甚至也不需要有结题报告，因此，尤为适用于中学生针对学习中的小问题开展研究。

本文涉及的圆锥曲线奇妙的光学性质，是引导学生领略圆锥曲线的统一性质、激发学生学习兴趣的极佳素材，其丰富的内涵和广泛的应用也是命题的热点。在同学们证明光学性质的方法和过程中，包含了圆锥曲线的定义、对称问题、切线问题、角平分线性质、夹（到）角公式以及向量等重要知识，推导过程中，涉及的方程思想、整体意识以及转化和化简的技巧和方法等，对于培养学生严谨的数理推导能力具有很高价值。

尽管笔者对于引导学生进行小课题研究的尝试才刚刚开始，但是，我们可以看到小课题研究使学生的思考也可以变得深刻，这一点往往是传统课堂教学难以达到的！而这种深刻的思考才是产生创新力的智慧源泉！